107年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：資訊處理
科　　目：資料結構
考試時間：2 小時　　　　　　　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
　　　　㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
　　　　㈢本科目得以本國文字或英文作答。

一、計算正整數 a 和 b 的最大公因數 gcd(a, b)的演算法，以類似 C 語言表示如下:

```
1    integer gcd(a, b) {
2        x = a; y = b;
3        while (y > 0) {r = x % y; x = y; y = r;}
4        return x;
5    }
```

其中資料型態 integer 表示整數，x % y 表示 x 除以 y 的餘數。請回答下列問題：（每小題 10 分，共 20 分）

㈠請證明：輸入任意兩個正整數，此程式執行一定時間後就會停止，不會造成無窮迴圈。

㈡假設 $a > b$，請證明此程式之 **while** 迴圈（第 3 行）至多只會被執行 $2\log_2 b + 1$ 次。

二、給定一個權重圖（weighted graph），$G = (V, E, w)$，假設 $V = \{1, 2, ..., n\}$，且每個邊（edge）e 的權重 $w(e)$都是正整數。令 $l(v)$為以 v 為端點的所有邊中權重最小的邊。將這些邊集合起來稱作 L，也就是 $L = \bigcup_{v\in V} l(v)$。

（每小題 5 分，共 20 分）

㈠假設每個邊的權重都不相同。請證明由 L 中這些邊所構成的子圖（edge induced subgraph）G[L]沒有迴圈。

㈡$G[L]$是否一定是 G 的擴張樹（spanning tree）？若是請證明之，若不一定是請給一個反例。

㈢用以上之結論，設計一個計算 G 的最小權重擴張樹（minimum spanning tree）的演算法。

㈣在一般的應用中，邊的權重可能會相同，請修正上述之演算法，使修正後之演算法可以正確找出答案。

三、假設陣列 $A[1..n]$儲存 n 個正整數 $x1, x2,..., x_n$。（每小題 10 分，共 20 分）

㈠已知所有的正整數 $x_i \le M$。請設計一個 $O(n+M)$時間的演算法將這些整數由小到大排列。

㈡已知所有的正整數 $x_i \le n^2$。請設計一個 $O(n)$時間的演算法將這些整數由小到大排列，或證明這是不可行的。

四、假設有個陣列 $A[1..n]$儲存著 n 個整數。可將 $A[1..n]$看成二元樹，其中 $A[1]$是樹根。$A[i]$的左右子節點分別為 $A[2i]$和 $A[2i+1]$, $i=1, 2, . . . , n/2$。若 $2i>n$ 或 $2i+1>n$，則這些子節點是不存在的。若 A 滿足 $A[i] \ge \max\{A[2i], A[2i+1]\}, 1 \le i \le n/2$，則稱陣列 $A[1..n]$是一個堆疊（heap）。假設有個副程式 sift(A, r, n)其輸入參數 A 是一個陣列，n 是 A 的大小，$r \le n$ 是一個指標，指向此子樹的樹根。副程式 sift(A, r, n)的功能是將 $A[r]$為樹根的子樹變成 heap。在呼叫 sift(A, r, n)之前，它的左右子樹都已經是 heap。副程式 sift(A, r, n)所需的計算時間是 $O(h(r))$，其中 $h(r)$是以 $A[r]$為樹根的子樹的高度，也就是從樹根到任一樹葉的最長距離。

（每小題 10 分，共 20 分）

㈠用 sift(A, r, n)設計一個線性時間的演算法，將陣列 $A[1..n]$變成 heap。

㈡分析以上所設計演算法的計算複雜度為 $O(n)$。

五、斐波納契數（Fibonacci number）F_n 的定義是 $F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n>1$。計算 Fibonacci number F_n 的演算法，以類似 C 語言表示如下：

```
1    integer f[N];    // array of N integers
2    integer F(n) {
3          if ( f[n] < 0)
4              f[n]= F(n－1)+ F(n－2);
5          return f[n];
6    }
7    integer Fib(n) {
8          f[0] = 0; f[1] = 1;
9          for (i = 2; i ≤ n; i = i + 1)
10             f[i]=－1;
11         return F(n);
12   }
```

其中資料型態 integer 表示整數。假設輸入的整數 $n>1$。主程式執行 Fib(n)，則副程式 $F(n)$第 4 行之指令：

$f[n]=F(n-1)+F(n-2)$會被執行幾次？請說明理由。（20 分）